CINEMATIQUE DU POINT

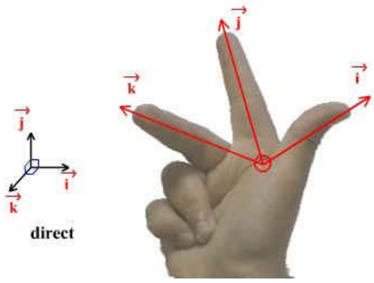
1. Repérage des événements

1. Référentiel

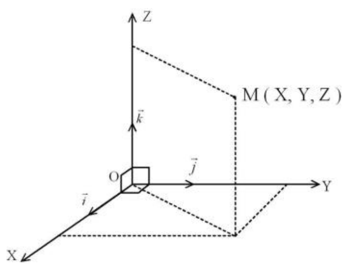
C'est le premier élément à définir lorsqu'on veut résoudre un problème de mécanique. Il fixe un cadre pour l'étude d'un système.
Il est constitué d'un repère d'espace et d'un repère de temps.
Un repère d'espace R est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont fixes et invariables dans le temps. Par commodité, on choisit des systèmes de coordonnées dont les axes sont orthogonaux.
Un repère de temps se fait avec une horloge qui donne un temps unique en tout point du repère.

2. Les différents repères d'espace

On travaille toujours dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposée orthonormée directe. $\vec{k}$ est donné par la règle du tire-bouchon, ou des trois doigts.



Coordonnées cartésiennes



Dans le référentiel d'étude, la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps. La base est fixe dans le référentiel.
Le point M est repéré par ses coordonnées :

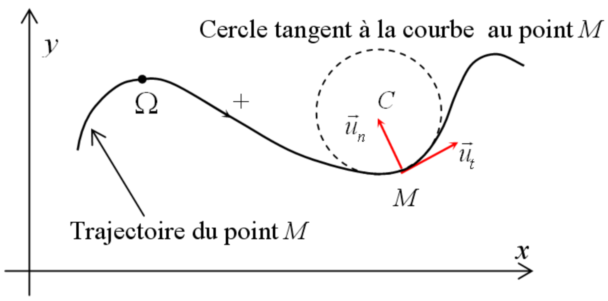
$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

Les fonctions x(t), y(t) et z(t) définissent la trajectoire du point M. On les appelle les <u>équations horaires du mouvement</u>.

<u>L'équation de la trajectoire</u> est la relation liant x, y et z indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps des équations horaires.

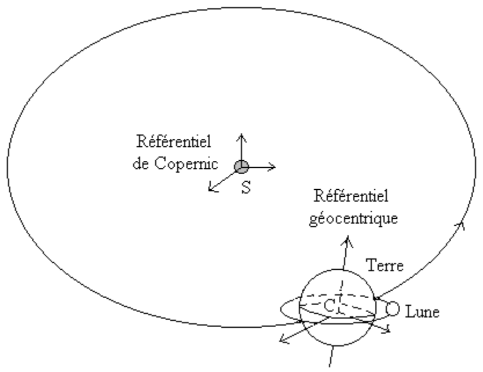
Repère de Frenet

Il s'agit d'un repère mobile associé au point M. le vecteur unitaire $\vec{u}_t$ est tangent à la trajectoire au point M et est dirigé dans le sens du mouvement. Le second vecteur de la base $\vec{u}_n$ est obtenu par rotation de $\pi/2$ et est dirigé vers le centre de courbure.



3. Quelques référentiels usuels

Voir animation http://clemspcreims.free.fr/Simulation/referentiels.swf



Référentiel de Copernic
Origine du repère au centre d'inertie du système solaire. Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles « fixes ».

Référentiel héliocentrique
Origine du repère au centre du Soleil. Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles « fixes ».

Référentiel géocentrique
Origine au centre de la Terre. Ses 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ce référentiel effectue une translation circulaire quasi uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Référentiel terrestre
L'origine choisie est un point à la surface de la Terre et qui tourne avec celle-ci. Ce référentiel effectue un mouvement de rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique.

2. Cinématique du point

La cinématique est l'étude du mouvement sans se soucier des causes qui lui a donné naissance.

1. La vitesse d'un point

Vitesse moyenne

La vitesse moyenne v correspond au rapport de la distance parcourue d pendant l'intervalle de temps Δt :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

La distance d s'exprime en mètre (m).
L'intervalle de temps en seconde (s).
La vitesse s'exprime en mètre par seconde m.s^{-1}.

Vitesse instantanée

La vitesse instantanée se définit comme une vitesse moyenne sur un intervalle de temps très court :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

En d’autres termes, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

De plus, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point considéré et dans le sens du mouvement.
En coordonnées cartésiennes, la vitesse s’écrit :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

La valeur de la vitesse est $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ et s’exprime en m/s.

2. L’accélération d’un point

Tout comme le vecteur vitesse rend compte de la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération rend compte des variations du vecteur vitesse par rapport au temps.
Le vecteur accélération correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire à la dérivée seconde du vecteur position :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

L’accélération s’exprime en $m.s^{-2}$.

En coordonnées cartésiennes

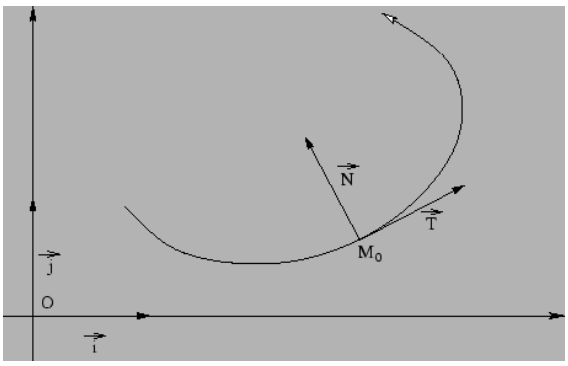
l’accélération s’écrit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\dot{x}(t)}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}(t)}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}(t)}{dt}\vec{k} = \ddot{x}(t).\vec{i} + \ddot{y}(t).\vec{j} + \ddot{z}(t).\vec{k}$$

La valeur de l’accélération est $a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ et s’exprime en m/s².

Dans le repère de Frenet

On retiendra que l’accélération s’exprime :



$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{N}}$$

v est la vitesse et s’exprime en $m.s^{-1}$.
R est le rayon de courbure en m.

3. Le vecteur quantité de mouvement

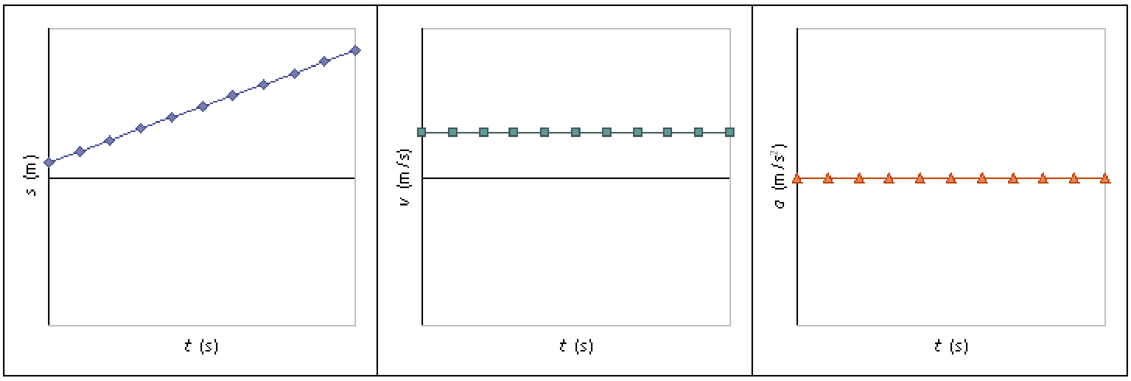
La quantité de mouvement d'un point matériel est égale au produit de sa masse m par son vecteur vitesse :

$$\vec{p} = m.\vec{v}$$

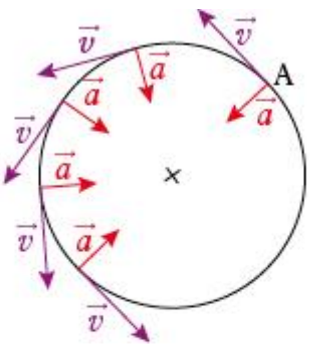
Comme la vitesse, la quantité de mouvement dépend du référentiel. Elle s'exprime en kg.m.s^{-1}.

4. Exemples de mouvements

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur vitesse constant : $\vec{v} = \overrightarrow{cte}$. La trajectoire correspondante est une portion de droite.



Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par une vitesse angulaire de rotation constante. La vitesse est constante pour autant on remarque que le vecteur vitesse ne l'est pas.



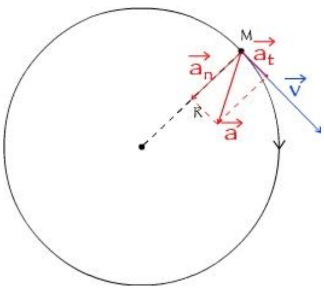
On peut écrire $v = R.\omega = cte$ mais $\vec{v} \neq \overrightarrow{cte}$.

Dans ce cas l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit :

$\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ car le terme $\dfrac{dv(t)}{dt} = 0$.

R est le rayon de courbure (m) et ω la vitesse angulaire (rad.s^{-1}).

Le mouvement circulaire non uniforme est caractérisé par une vitesse angulaire de rotation qui n'est pas constante. Son vecteur accélération est quelconque dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.



$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$